MINISTERE DE L'EQUIPEMENT, DU LOGEMENT
ET DES TRANSPORTS ET DE L'ESPACE

CONCOURS COMMUN 1993
ENTPE, ENSG, ENTM, ENSTIMD

4

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Temps accordé : 2 heures
(2 pages)

Première Partie

I désigne un intervalle non réduit à un point inclus dans] 0, +∞[ou dans]-∞, 0[.
On considère les deux équations différentielles:

$$\text{(E)} \quad x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{(E')} \quad x^2y'' + 3xy' + y = 0$$

I.1. Transformer (E') sur I par le changement de variable défini par t= Ln|x| et résoudre (E') sur I. (E') admet-elle des solutions sur **R** autres que la solution $y = 0$?

I.2. Résoudre (E) sur I (on déterminera les solutions en fonction de la primitive qui s'annule en 0 de la fonction $u \to \frac{\text{Arctan}\, u}{u}$ après en avoir justifié l'existence).

I.3. Montrer que (E) admet sur un intervalle ouvert]-*r*, *r*[que l'on déterminera, une seule solution développable en série entière sur cet intervalle : on explicitera les coefficients de cette série entière.

I.4. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur **R**.

Deuxième partie

Soit $f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x \frac{\text{Arctan}\, t}{t}dt$ pour $x \in \mathbf{R}^*$

II.1. Après avoir justifié l'existence de f sur $\mathbf{R}^*$ montrer que f se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et expliciter $f^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbf{N}$.

II.2. a. Montrer que $f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

b. Donner une valeur approchée de $f(1)$ à 10^{-3} près

c. En déduire une valeur approchée de $f'(1)$ et $f''(1)$ (il n'est pas nécéssaire d'utiliser une série)

II.3. a. Etudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$

b. Démontrer, pour $x > 0$, l'égalité : $f(x) - \frac{1}{x^2} f(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}\frac{\text{Ln}\, x}{x}$

On rappelle que, pour $t > 0$, $\text{Arctan}\, t + \text{Arctan}\frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$

c. En déduire un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$

d. Montrer que pour $|x|>1$, $f(x) = \frac{\pi}{2}\frac{\text{Ln}|x|}{|x|} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2}\frac{1}{x^{2n+2}}$

Donner $f(5)$ à 10^{-5} près.

II.4. Etudier les variations de f sur $\mathbf{R}$ et donner l'allure de la courbe représentative de f.

FIN